

### • تعريف دالة أصلية لدالة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$ . نسمي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  كل دالة  $F$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = f(x)$ .

### • مبرهنة (وجود دالة أصلية)

كل دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال.

### • مبرهنة

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$   
فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $I$  كما يلي :  
من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

### • مبرهنة

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$ .

إذا كان  $x_0 \in I$  و  $y_0 \in \mathbb{R}$  فإنه توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  حيث  $y_0 = G(x_0)$  و معرفة على  $I$  كما يلي : من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ .

**نتيجة :** إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن الدالة

$x \mapsto F(x) - F(x_0)$  المعرفة على  $I$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة  $f$  على  $I$  و التي تنعدم عند  $x_0$ .

### • دوال أصلية لدوال مألوفة

الدالة $f$ هي الدالة ...	الدوال الأصلية للدالة $f$ هي الدوال $F$ ...	مجال تعريف $I$ للدالتين $f$ و $F$
$x \mapsto k$ حيث $k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	إذا كان $n \geq 1$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n \leq -2$ فإن $I = ]-\infty; 0[$ أو $I = ]0; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = ]0; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$	$I = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$u$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $c$  عدد حقيقي.

الدالة $f$ معرفة كما يلي ...	الدوال الأصلية $F$ للدالة $f$ معرفة كما يلي ...	ملاحظات
$f(x) = u'(x) \cdot u(x)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot u(x)^{n+1} + c$	إذا كان $n > 0$ فإن $I = \mathbb{R}$ إذا كان $n < 0$ و $n \neq -1$ فإن $I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد $x$ من $I$ حيث $u(x) = 0$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$	$I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد $x$ من $I$ حيث $u(x) \leq 0$
$f(x) = [\cos u(x)] \cdot u'(x)$	$F(x) = \sin u(x) + c$	$I$
$f(x) = [\sin u(x)] \cdot u'(x)$	$F(x) = -\cos u(x) + c$	$I$
$f(x) = (v \circ u)(x) \cdot u'(x)$	$F(x) = (v \circ u)(x) + c$	$v$ هي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $J$ حيث $I \subset J$

**ملاحظة :** يمكن لدالة أن تكون غير قابلة للاشتقاق على مجال و تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.

الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $[0 ; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0 ; +\infty[$  لكنها تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0 ; +\infty[$  مثل الدالة  $x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ .

1 تعيين دوال أصلية بسيطة

تمرين 1

$F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$  : كما يلي  $R$  دالة معرفة على

و  $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$  : كما يلي  $R$  دالة المعرفة على

1- بين أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

2- عين دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $R$ .

حل

• الدالة  $F$  دالة كثير الحدود. إذن  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $R$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$F'(x) = 6x^2 - 2x + 3. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : F'(x) = f(x).$$

ينتج أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ . وبالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $R$

هي الدوال  $F(x) + c \mapsto x$  حيث  $c \in R$ .

• لإيجاد دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $R$ ، يكفي تغيير الحد الثابت في عبارة  $F(x)$ .

الدالة  $G$  المعرفة على  $R$  كما يلي :  $G(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

تمرين 2

1- أوجد دالة أصلية لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $I$  أو  $J$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4 \text{ و } I = R : g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ و } J = ]0; +\infty[.$$

2- أوجد كل الدوال الأصلية لكل دالة من الدالتين  $f$  و  $g$ .

حل

• الدالة  $F$  المعرفة على  $R$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$  قابلة للاشتقاق على  $R$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x, F'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4.$$

$$= f(x)$$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

الدالة  $G$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $G(x) = -\frac{1}{x}$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $G'(x) = \frac{1}{x^2}$  إذن الدالة  $G$  هي دالة أصلية للدالة

على المجال  $]0; +\infty[$ .

• الدوال  $F(x) + c \mapsto x$  حيث  $c \in R$  هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

الدوال  $G(x) + c' \mapsto x$  حيث  $c' \in R$  هي الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$ .



## 2 إيجاد الدالة الأصلية لدالة التي تأخذ قيمة $y_0$ عند العدد $x_0$

### تمرين

$f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $I$  كما يلي :  $I = \mathbb{R}$  ;  $f(x) = x^2 - x$  ;  $I = ]-\infty; 0[$  ;  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

1- عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تأخذ القيمة 1 عند العدد 0.

2- عين الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $g$  على  $] -\infty ; 0[$  والتي تنعدم عند العدد -2 .

### حل

• الدوال  $H$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية لـ  $f$

على  $\mathbb{R}$ . لدينا  $H(0) = 1$  أي  $\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2 + c = 1$  . إذن  $c = 1$  . هذه الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$

هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

• الدوال  $L$  المعرفة على  $] -\infty ; 0[$  كما يلي :  $L(x) = \frac{1}{x} + \lambda$  :  $\lambda \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية

للدالة  $g$  على  $] -\infty ; 0[$  . لدينا  $L(-2) = 0$  أي  $\frac{1}{-2} + \lambda = 0$  إذن  $\lambda = \frac{1}{2}$  .

ينتج أن الدالة الأصلية للدالة  $g$  على المجال  $] -\infty ; 0[$  والتي تنعدم عند -2 هي الدالة  $G$

المعرفة على المجال  $] -\infty ; 0[$  كما يلي :  $G(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$  .

## 3 استعمال الدوال الأصلية لدوال مأثوفة

### تمرين 1

عين الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال  $f$  على المجال  $I$  في الحالات التالية :

$$I = ]0 ; +\infty[ : f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3 \quad (2) \quad I = \mathbb{R} : f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x \quad (4) \quad I = ]0 ; +\infty[ : f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1 \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (5)$$

### حل

1. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^5 + x^2 - 3x + 6$  هي الدوال  $F$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

2. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0 ; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0 ; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = -\frac{3}{x} - \sin x + 3x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

3. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0 ; +\infty[$  حيث  $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0 ; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = -4\sqrt{x} - \cos x - x + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$  .

4. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \cos 3x$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R} .$$

5. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } F(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R} .$$

- في كل حالة من الحالات التالية، تعرف على عبارة الدالة  $f$  ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .
- (1)  $I = \mathbf{R} : f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
- (2)  $I = \mathbf{R} : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- (3)  $I = \mathbf{R} : f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$
- (4)  $I = \mathbf{R} : f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x$

حل

1. بوضع  $u(x) = x^2 + x + 1$ . لدينا الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x + 1$ . نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u(x) \neq 0$  و  $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ . إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbf{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbf{R}$ . أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbf{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} + c$  حيث  $c \in \mathbf{R}$ .

2. بوضع  $u(x) = x^2 + 1$  و  $v(x) = \sqrt{x}$ . الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x$ . الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . لدينا  $(v \circ u)(x) = v[u(x)] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ . نلاحظ أن الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = u'(x) \times (v \circ u)(x)$$

$$= (v \circ u)'(x)$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbf{R}$  هي الدوال  $v \circ u$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)] + c$$

$$= v(x^2 + 1) + c$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} + c$$

أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbf{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbf{R}$ .

**ملاحظة :** بوضع  $u(x) = x^2 + 1$  : الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u(x) > 0$ . لدينا أيضا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $u'(x) = 2x$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ . وبالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbf{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbf{R}$ . أي : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbf{R}$ .

3. بوضع  $u(x) = x^2 - 4x + 1$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$  و من أجل كل عدد  $x$

$$u'(x) = 2x - 4. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times u^3(x)$$

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbf{R}$  كما يلي :  $f(x) = (x - 2) \times (x^2 - 4x + 1)^3$  هي الدوال

$$F \text{ المعرفة على } \mathbf{R} \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbf{R}.$$

$$\text{أي : من أجل عدد حقيقي } x : F(x) = \frac{1}{8} (x^2 - 4x + 1)^4 + c \text{ حيث } c \in \mathbf{R}.$$

4. بوضع  $u(x) = \sin x$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbf{R}$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x, u'(x) = \cos x.$$

نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي  $x : f(x) = u'(x) \cdot u^4(x)$ . ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$

$$\text{المعرفة على } \mathbf{R} \text{ كما يلي : } f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x \text{ هي الدوال } F \text{ المعرفة على } \mathbf{R}$$

$$\text{كما يلي : } F(x) = \frac{1}{5} u^5(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbf{R}.$$

$$\text{إذن الدوال الأصلية للدالة } f \text{ هي الدوال } F \text{ المعرفة على } \mathbf{R} \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c \text{ حيث } c \in \mathbf{R}.$$



تمرين 1

- $f$  دالة معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$
- بين أنه يوجد عدداً حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  :  $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$
  - عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .
  - حدد الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $f$  التي تنعدم عند العدد 2.

حل

- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

ينتج أن  $a = 1$  و  $b = -1$  . وبالتالي من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

**ملاحظة :** يمكن توحيد المقامات في العبارة  $a + \frac{b}{(x-1)^2}$  ثم مقارنة عبارتي  $f(x)$  .
  - الدالة  $f$  معرفة على  $]1; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  . نضع  $u(x) = x - 1$
  - الدالة  $u$  معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $u'(x) = 1$
- لدينا من أجل كل عدد  $x$  ،  $f(x) = 1 - \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$  ، إذن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  ،
- $$f(x) = \left[ x + \frac{1}{u(x)} \right]'$$
- ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي :
- $$F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$
- تعيين الدالة الأصلية للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$  . لدينا  $F(2) = 0$  يعني  $2 + \frac{1}{2-1} + c = 0$  أي  $3 + c = 0$  إذن  $c = -3$  . ينتج أن الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي  $F(x) = x + \frac{1}{x-1} - 3$  .

## تمرين 2

أوجد الدوال الأصلية على  $\mathbb{R}$  لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي :

$$g(x) = \sin^4 x \quad ; \quad f(x) = \cos^4 x$$

**حل**

. تعيين العبارة الخطية لكل من  $\sin^4 x$  و  $\cos^4 x$

نضع  $\cos x + i \sin x = e^{ix}$  و  $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$  (ترميز أولير)

إذن  $\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$  و  $\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$

ينتج أن  $\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4$  و  $\sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4$

لدينا  $(e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6$$

و بالتالي  $\cos^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6)$

أي أن  $\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$

لدينا أيضا  $(e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6$$

و بالتالي  $\sin^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6)$

أي أن  $\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$

إذن الدالتان  $f$  و  $g$  معرفتان كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$G(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c' \quad \text{حيث } c' \in \mathbb{R}$$



استعمال جدول الدوال المشتقة

4 عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال التالية على المجال  $I$ .

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 2x + 1$

2.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x - 2\cos x$

4.  $I = ]-\infty; 0[ : f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$

5.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

6.  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = 1 - \frac{1}{\cos x^2}$

7.  $I = \mathbb{R} : f(x) = (x-3)^4$

8.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x \cos^2 x$

9.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 4x(x^2 + 4)^2$

10.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

11.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$

12.  $I = ]3; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

13.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

14.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

15.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

16.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin x}}$

17.  $I = ]-1; 1[ : f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

18.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x \cos x + \sin x$

19.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

20.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

عموميات على الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية، اثبت أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

1.  $f(x) = 3x^2 - 1$

2.  $I = \mathbb{R} : F(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$   
 $f(x) = \sqrt{x+1}$

3.  $I = ]-1; +\infty[ : F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$   
 $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

4.  $I = ]0; +\infty[ : F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$   
 $f(x) = \cos x - x \sin x$

5.  $I = \mathbb{R} : F(x) = x \cos x$

مجموعة الدوال الأصلية - الشروط الأولية

2  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$f(x) = 2 \sin 2x$ . عين، من بين الدوال التالية، دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

$G : x \mapsto \sin 2x$  ;  $F : x \mapsto 2 \sin^2 x$

$L : x \mapsto 7 - \cos 2x$  ;  $H : x \mapsto 1 + \cos^2 x$

3 أوجد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $I$

حيث  $f(x_0) = y_0$  في الحالات التالية :

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$   
 $y_0 = 0$  ;  $x_0 = 1$

2.  $I = \mathbb{R} : f(x) = -2 \sin 2x$   
 $y_0 = 1$  ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x$   
 $y_0 = 0$  ;  $x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $y_0 = 1$  ;  $x_0 = 1$

5.  $f(x) = \frac{-3}{x^3} + \cos x$  :  $I = ]0; +\infty[$
6.  $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - x - 2$  :  $I = ]0; +\infty[$
7.  $f(x) = \sin 2x + \cos(3x + \frac{\pi}{6})$  :  $I = \mathbb{R}$

### مسائل

9  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{4 + \sin x}}$$

1. عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تأخذ القيمة 4 عند العدد 0.
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

10  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2}$$

1. بين أنه يوجد عدداً حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .
3. عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  التي تأخذ القيمة 1 عند العدد 1.

11  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2(x^2 + 1) + 2x(x^3 + 1)$$

1. عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
2. ما هي الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  التي تنعدم عند العدد 0؟

12 عين الدوال الأصلية للدالتين  $f$  و  $g$

المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = \cos^3 x \quad \text{و} \quad g(x) = \sin^3 x$$

### تعيين دوال أصلية

5 عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال التالية المعرفة على المجال  $I$ .

1.  $f(x) = \cos x \sin^3 x$  :  $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \sin x \cos^2 x$  :  $I = \mathbb{R}$
3.  $f(x) = \cos x \sin^2 x$  :  $I = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = \frac{5}{(x+5)^5}$  :  $I = ]-\infty; -5[$
5.  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x}$  :  $I = ]0; +\infty[$
6.  $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$  :  $I = ]-1; +\infty[$
7.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$  :  $I = \mathbb{R}$

6  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

و  $F$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-x-2}{x^2-1}$   
برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

7  $f$  و  $F$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -3x^2 + 4x + 1$$

$$F(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$$

1. برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .
2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

8 عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل حالة من الحالات التالية :

1.  $f(x) = -x + 3$  :  $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = x^2 + x$  :  $I = \mathbb{R}$
3.  $f(x) = 2x^3 - x + 1$  :  $I = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = \frac{2}{x^3}$  :  $I = ]0; +\infty[$